

חלוקה שווה עם העדפות שונות בהלכה ובמדע

אראל סגל-הלוי

בעשורים האחרונים מתנהל בעולם מחקר מדעי רב ומגוון בנושא חלוקה הוגנת. הנחת היסוד של מחקר זה היא שלכל אדם יש העדפות אישיות שונות, והחלוקה צריכה לתת לכל אחד חלק בעל שווי הוגן בהתאם להעדפות האישיות שלו. בעיות של חלוקה הוגנת נחקרו כבר אלפי שנים קודם לכן בתורה ובתלמוד. מטרת המאמר היא לקשר בין המחקר המדעי לבין המחקר ההלכתי בנושא זה. החלק הראשון של המאמר סוקר כמה סוגיות עיקריות בתורה ובהלכה העוסקות בחלוקה הוגנת של נחלות וירושות, החלק השני סוקר בקצרה כמה מחקרים מדעיים בנושא זה, והחלק השלישי משווה בין ההלכה למחקר.

חלק ראשון: חלוקה הוגנת בתורה ובהלכה

א. חלוקה בגורל

שני אחים קיבלו קרקע בירושה ורוצים לחלק אותה ביניהם. איך בדיוק יבצעו את החלוקה?

* חלק מהתוכן ההלכתי במאמר הוצג בקורס "ניצוצות שחר" בבראילן, בהנחיית הרב שבתאי רפפורט ורולי בלפר. חלק מהתוכן המדעי במאמר פותח במסגרת מחקר הדוקטורט של הכותב, בנושא "חלוקה הוגנת של קרקע", במחלקה למדעי-המחשב בבראילן, בהנחיית פרופ' יונתן אומן ואבינתן חסידים. אני מודה לקרן מלגות הנשיא של אוניברסיטת בראילן, לקרן מרדכי ומוניק כץ ולקרן הלאומית למדע על התמיכה הנדיבה במחקרי. אני מודה לפרופ' שמואל ניצן על ההפניות למקורות מהמחקר הכלכלי, ולר' עקיבא כהנא על ההפניות למקורות הלכתיים. ולאשתי גליה, תודה על כל העוגות!

1. המאמר הנוכחי מתמקד בבעיות חלוקה שבהן הזכויות של כל הצדדים ידועות ומוסכמות, כמו במקרה של ירושה או חלוקת שותפות. ישנן גם בעיות חלוקה שבהן הזכויות אינן מוסכמות. דוגמה אחת היא כאשר "שניים אוחזין בטלית, זה אומר כולה שלי וזה אומר כולה שלי" או "חציה שלי" וכד'. דוגמה שנייה היא כאשר אדם נפטר ומשאיר חובות בערכים שונים לנושים שונים, או פתובות בערכים שונים לנשים שונות. בעיות מסוג זה נדונו בהרחבה גם בספרות ההלכתית וגם בספרות המדעית, אולם הן מעבר להיקפו של המאמר הנוכחי. לדיון כלכלי

המקור בתורה לסוגיה זו נמצא בפרשת חלוקת הארץ בין בני ישראל:

וַיְדַבֵּר ה' אֶל מֹשֶׁה לֵאמֹר. לְאַלֶּה תַחְלַק הָאָרֶץ בְּנִחְלָה בְּמִסְפַּר שְׁמוֹת. לְרֹב תִּרְבֶּה נִחְלָתוֹ וְלִמְעַט תִּמְעִיט נִחְלָתוֹ אִישׁ לְפִי פְקָדָיו יִתֵּן נִחְלָתוֹ. אַף בְּגוּרָל יִחְלַק אֶת הָאָרֶץ לְשֵׁמוֹת מִטּוֹת אֲבֹתָם יִנְחֲלוּ. עַל פִּי הַגּוּרָל תַּחְלַק נִחְלָתוֹ בֵּין רֹב לִמְעַט. (במדבר כו, נב-נו)

מהפסוקים עולים שני עקרונות חלוקה: (א) התאמת הנחלה לגודל השבט – כל שבט יקבל נחלה בהתאם למספר ה"פקודים" (אזרחים בוגרים) בשבט, כך שתגיע לכל "פקוד" נחלה שווה. (ב) חלוקת הנחלות היא בגורל.

נתחיל מהמקרה הפשוט, שבו יש רק שני יורשים שיש לחלק ביניהם קרקע, לשניהם יש זכויות שוות (אף אחד לא בכור), הקרקע שיש לחלק היא אחידה ואין הבדלים משמעותיים בין אזורים שונים בקרקע. במקרה זה, תהליך החלוקה הוא פשוט: מחלקים את הקרקע לשני חלקים שווים בגודלם, ומחליטים על-פי גורל איזה חלק יקבל כל אחד. כך נראה גם מהגמרא (בסוגריים פירוש רשב"ם):

ר' יוסי אומר: האחין שחלקו (בירו שנים ושלושה חלקין שוין, ואחר כך יפילו גורלות; והוא הדין לשותפין) כיון שעלה גורל לאחד מהן (שנפל הגורל על אחד מהם והוברר חלקו) – קנו כולם. מאי טעמא? אמר ר' אלעזר: כנחלת ארץ ישראל, מה נחלה בגורל – אף כאן בגורל (בבלי בבא בתרא קו ע"ב. וכן הוא ברמב"ם הלכות שכנים ב, יא, ובשו"ע חושן משפט קעג, ב).

ב. חלוקת קרקע לא אחידה

החלוקה נעשית מורכבת יותר כאשר הקרקע שיש לחלק אינה אחידה: יש בה אדמה פורייה ואדמת טרשים, חלק סמוך למעיין וחלק סמוך לכביש ראשי, וכדומה. איך נקבעת החלוקה במקרה זה? בתורה לא מצאתי התייחסות מפורשת למצב זה, אולם בגמרא ישנן כמה סוגיות העוסקות בכך. סוגיה אחת מתייחסת למקרה פרטי של חלוקת קרקע בין אחים או שותפים:

חד גיסא נגרא וחד גיסא נהרא – פלגין לה בקרנא זול (בבלי בבא בתרא יג ע"א).

בבעיית "שניים או חזין" (=contested garment) ראו: Jean-Pierre Benoit, "The Nucleolus Is Contested-Garment-Consistent: A Direct Proof", *Journal of Economic Theory* 77.1 (1997), pp. 192-196.

לדיון כלכלי בבעיית הכתובות ראו: Robert Aumann and Michael Maschler, "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud", *Journal of Economic Theory* 36.2 (1985), pp. 195-213.

פירוש:

ארץ מרובעת, שהיה הנהר מקיף לה מזרח וצפון והדרך דרום ומערב – חולקין אותה באלכסון, כדי שיגיע לזה נהר ודרך ולזה נהר ודרך (רמב"ם הלכות שכנים יב, ג, וכן שו"ע חו"מ קעד, ב).

כלומר: אם אפשר, מבחינה גיאומטרית, לחלק את הקרקע לשני חלקים בעלי מאפיינים זהים ראוי לעשות כן. מה המצב אם הגיאומטריה אינה מאפשרת חלוקה כזו? שאלה זו נדונה בעניין חלוקת ארץ ישראל לשבטים:

תניא: עתידה ארץ ישראל שתחלק לשלשה עשר שבטים. שבתחלה לא נתחלקה אלא לשנים עשר שבטים, ולא נתחלקה אלא בכסף, שנאמר "בין רב למעט" (וצריך לדקדק בין רב למעט להוסיף דמים הרב למעט: שהזיבורית קרי ליה 'מעט' והעידית קרי 'רב'). אמר רבי יהודה: סאה ביהודה שוה חמש סאין בגליל. ולא נתחלקה אלא בגורל, שנאמר "אך בגורל"...

ולא נתחלקה אלא לכספים, שנאמר "בין רב למעט". למאי? אילימא לשופרא וסניא (מה שהיתה זו יפה מזו וזו רעה מזו, דמסליק ליה בדמי מאן דאית ליה שופרא למאן דאית ליה סניא) – אטו בשופטני עסקינן (דמסתלקי מנחלתם בזווי?)! אלא לקרובה ורחוקה (הקרקעות היו חולקין בשוה: מי שלוקח מן הכחוש – נוטל יותר עד כדמי היפה. אבל, מי שעולה לו גורלו בקרוב לירושלים – מעלה מעות למי שעלה גורלו ברחוק מירושלים, שהרחוק גרוע הוא מפני שני דברים: אחד מפני שרחוק מבית המקדש, ואחד מפני שקרוב הוא לארץ העמים ויש לו לדאג מהן; ורבי יהודה – מילתא באפי נפשה קאמר: דמי שנפל גורלו בגליל – נוטל ה' סאין כנגד סאה שחבירו נוטל ביהודה; אי נמי משום דקאמר תנא קמא דקורבא ורוחקא מחלקין בכספים – אתא איהו לסיועיה ולמימר דסאה ביהודה שוה חמש סאין בגליל בשביל שיהודה קרוב לירושלים וגליל רחוק יותר, וצריך להעלות כספין שוה ד' סאין לסאה שבגליל). כתנאי: רבי אליעזר אומר: בכספים העלוה (לההוא ביני דקורבא ורוחקא; וסברא הוא, ר'מבין רב למעט' לא נפקא ליה, דמקרא לא שמעינן אלא העלאה, לא שנה בכספים לא שנה בקרקע), רבי יהושע אומר: בקרקע העלוה (בבלי בבא בתרא קכב, ע"א).

הסוגיה מתייחסת לשני גורמים המשפיעים על שווי הנחלה: איכות האדמה ("שופרא וסניא"), והמיקום ("קרובה ורחוקה"). הסוגיה מציעה שתי דרכים לאזן את שווי הנחלות: גודל ("בקרקע העלוה") וכסף ("בכספים העלוה"). לדעת רשב"ם, ההבדל באיכות האדמה התאזן על ידי גודל הנחלה – מי שקיבל קרקע באזור שבו האדמה פורייה פחות, קיבל קרקע גדולה יותר. לעומת זאת, ההבדל הנובע ממיקום התאזן

- על ידי כסף – מי שקיבל נחלה באזור מרוחק מהמרכז, קיבל פיצוי כספי ממי שקיבל נחלה במרכז. רשב"ם מדגיש שאופן הפיצוי הוא "סברא" – הוא אינו כתוב במפורש בתורה ולכן נחלקו בו תנאים. אולם עקרון החלוקה העולה מסוגיות אלו הוא ברור:
- בשלב ראשון יש לחלק את הקרקע ל"חבילות" בעלות אותו שווי כלכלי, כאשר "חבילה" כוללת נחלה בגודל משתנה, וכן תשלום כספי חיובי או שלילי לפי הצורך. מסתבר שחלוקה זו מתבצעת על ידי שמאי.
 - בשלב שני מחליטים, על-פי גורל, מי יקבל כל אחת מהחבילות.

ג. חלוקה עם העדפות אישיות

עד עתה הנחנו שהערך של כל יחידת קרקע הוא אובייקטיבי ושווה לכל האחים. אולם במקרים רבים, הערך יכול להיות שונה לאחים שונים. לדוגמה, נניח שאחד האחים עוסק בחקלאות והשני ברעיית עיזים. האח הראשון יעדיף לקבל קרקע קטנה אך שטוחה ונוחה לעיבוד, על-פני קרקע גדולה אך הררית וסלעית; האח השני יעדיף את ההיפך. במקרה זה, חלוקה בגורל תהיה מאוד לא יעילה, שכן ייתכן שהגורל ייתן לאח החקלאי דווקא את הנחלה הסלעית ולאח הרועה דווקא את הנחלה הקטנה, כך שאיש מהם לא יהיה מרוצה. האם גם במצב כזה התורה מחייבת את האחים לחלק את הנחלה בגורל? לעניות דעתי התשובה היא לא, ויש לכך מקור בתורה:

וּמְקַנָּה רַב הָיָה לְבְנֵי רְאוּבֵן וְלְבְנֵי גָד, עֲצוּם מְאֹד; וַיִּרְאוּ אֶת אֶרֶץ יַעֲזֹר וְאֶת אֶרֶץ גִּלְעָד, וְהִנֵּה הַמָּקוֹם מְקוּם מְקַנָּה... וַיֹּאמְרוּ אֶל מֹשֶׁה וְאֶל אֶלְעָזָר הַכֹּהֵן וְאֶל נְשִׂאֵי הָעֵדָה לֵאמֹר... "הָאֶרֶץ אֲשֶׁר הִכָּה ה' לְפָנַי עֲדַת יִשְׂרָאֵל אֶרֶץ מְקַנָּה הוּא, וְלַעֲבָדֶיךָ מְקַנָּה". וַיֹּאמְרוּ "אִם מִצְּאֵנוּ חֵן בְּעֵינֶיךָ יְיָ אֶת הָאֶרֶץ הַזֹּאת לַעֲבָדֶיךָ לְאַחֲזָהּ, אֵל תַּעֲבֹרְנוּ אֶת הַיַּרְדֵּן". ... וַיֹּאמְרוּ אֲלֵיהֶם מֹשֶׁה "אִם תַּעֲשׂוּן אֶת הַדָּבָר הַזֶּה... וְעָבַר לְכֶם כָּל חַלּוּץ אֶת הַיַּרְדֵּן לְפָנַי ה' עַד הוֹרִישׁוּ אֶת אֲבִיכֶם מִפְּנֵי, וְנִכְבְּשָׁה הָאֶרֶץ לְפָנַי ה' – וְאַחַר תֵּשְׁבוּ וְהִיִּיתֶם נְקִיִּים מֵה' וּמִיִּשְׂרָאֵל, וְהִיִּיתָ הָאֶרֶץ הַזֹּאת לְכֶם לְאַחֲזָהּ לְפָנַי ה'" (במדבר לב, א-כב).

בני גד ובני ראובן ביקשו ממשה לקבל את עבר הירדן המזרחי. משה הסכים בתנאי שישתתפו בכיבוש הארץ כולה. והדבר תמוה: הרי בפרשת פינחס נאמר בפירוש שיש לחלק את הארץ בגורל. לכאורה משה היה צריך לומר להם "חכו להגרלה ותקבלו את החלק שיעלה בגורלכם". מדוע הסכים לתת להם את החלק שביקשו?

לעניות דעתי, התשובה היא שהתורה מתחשבת בהעדפות אישיות בחלוקת הקרקע. הגורל, שנזכר בפרשת פינחס, הוא רק ברירת מחדל, המתאימה למצב שבו אין העדפות אישיות. אולם בני גד ובני ראובן הציגו העדפות אישיות ברורות: "עבר הירדן המזרחי טוב לנו כי יש לנו מקנה". נרמז כאן גם שעבר הירדן המזרחי פחות

טוב לשאר השבטים, שאין להם מקנה והם מתפרנסים מחקלאות. וכן נאמר בפירושו במשנה: "רבי יוסי הגלילי אומר: אין מביאין ביכורים מעבר הירדן, שאינה ארץ זבת חלב ודבש" (משנה ביכורים א, י). החלוקה שהציעו בני גד וראובן טובה גם להם וגם לשאר השבטים, ולכן משה קיבל אותה והעדיף אותה על-פני החלוקה בגורל. דוגמה נוספת להעדפות אישיות נמצאת בספר יהושע, בפרשת חלוקת הארץ:

וַיְדַבְּרוּ בְּנֵי יוֹסֵף אֶת יְהוֹשֻׁעַ לֵאמֹר "מִדּוּעַ נִתְּתָה לִי נַחֲלָה גּוֹרֵל אֶחָד וְחֶבֶל אֶחָד וְאֲנִי עִם רֹב עַד אֲשֶׁר עַד פֶּה בְּרַכְנֵי ה'?" וַיֹּאמֶר אֲלֵיהֶם יְהוֹשֻׁעַ "אִם עִם רֹב אֶתָּה עֲלֶה לָךְ הִיעָרָה וּבְרֵאתָ לָךְ שָׁם בְּאֶרֶץ הַפְּרָזִי וְהִרְפָּאִים כִּי אֵץ לָךְ הָר אֶפְרַיִם." וַיֹּאמְרוּ בְּנֵי יוֹסֵף "לֹא יִמָּצָא לָנוּ הָהָר, וְנִרְכַּב בְּרוֹזֵל בְּכָל הַכְּנָעֲנִי הַיֹּשֵׁב בְּאֶרֶץ הָעֲמֹק לְאֲשֶׁר בְּבֵית שָׁאן וּבְנֹתֶיהָ וְלְאֲשֶׁר בְּעֲמֹק יִזְרְעֶאל." וַיֹּאמֶר יְהוֹשֻׁעַ אֶל בֵּית יוֹסֵף לְאֶפְרַיִם וּלְמְנַשֶּׁה לֵאמֹר "עִם רֹב אֶתָּה וְכֹחַ גְּדוֹל לָךְ, לֹא יִהְיֶה לָךְ גּוֹרֵל אֶחָד. כִּי הִר יִהְיֶה לָךְ כִּי יַעַר הוּא וּבְרֵאתוֹ וְהָיָה לָךְ תַּצְאָתוֹ כִּי תוֹרִישׁ אֶת הַכְּנָעֲנִי כִּי רָכַב בְּרוֹזֵל לוֹ כִּי חֲזַק הוּא" (יהושע יז, יד-יח).

בני יוסף התלוננו שהנחלה שקיבלו אינה מספיקה להם. גודל הנחלה נקבע לפי מספר הפקודים מגיל 20 ומעלה, אבל ייתכן שבשבט יוסף היו ילדים רבים מתחת לגיל 20 ולכן הגודל לא הספיק. לפי מלבי"ם שם, יהושע קיבל את בקשתם:

אז ראה יהושע כי מוכרח להוסיף על גבול ארצם, והם הערים מאשר ומיששכר, שהוסיף למנשה את בית שאן וכו' (כנ"ל פסוק יא). אמר להם: אחר שיש לך שני מעלות, [א] "עם רב אתה" בכמות, [ב] "כוח גדול לך" באיכות ובחוזק, לכן "לא יהיה לך גורל אחד", רוצה לומר, תוכל להוסיף על גורלך. "כי הר", [א] "ע"י שעם רב אתה, "יהיה ההר לך", לצרכך, "כי יער הוא ובראתו", ותבנה שם ערי מושב. [ב] "ע"י שכוח גדול לך, "והיו לך תוצאותיו", אני מוותר לך גם גבולי ההר אחריו, שהוא העמק, הערים אשר בחלק אשר ויששכר (שחשב למעלה יא). והם לא יקפידו על זה במה שאני מגרע מנחלתם, "כי רכב ברזל לו", וגם "חזק הוא" מצד עצמו, ולא יוכלו הם להורישו, וישמחו על זה כי אתה תורישנו משם, וזה הודעה על מה שאמר למעלה (יהושע יז, יא): "ויהי למנשה באשר וביששכר", ושככל-זאת גם הם לא הורישוהו.

יהושע נתן לשבט יוסף נחלה גדולה יותר על חשבון שבטי יששכר ואשר, בגלל ההעדפות האישיות: שבט יוסף, הגדול והחזק, מעדיף לקבל נחלה גדולה יותר, גם אם יש בה כנענים שצריך להילחם בהם. שבטי יששכר ואשר, החלשים והקטנים יותר, מעדיפים לקבל נחלה קטנה יותר, ובלבד שלא יצטרכו להתמודד עם כנענים. בסופו של דבר, המצווה לחלק את הארץ בגורל בלבד (ללא שינויים הקשורים להעדפות אישיות) התקיימה בשבעה שבטים – השבטים ש"התפרו" מלרשת את הארץ:

וַיִּקְהָלוּ כָּל עַדַת בְּנֵי יִשְׂרָאֵל שְׁלֵה וַיִּשְׁכַּיְנוּ שָׁם אֶת אֶהֱל מוֹעֵד וְהָאָרֶץ נִכְבְּשָׁה לַפְּגִיָּהִים. וַיִּוָּתְרוּ בְּבְנֵי יִשְׂרָאֵל אֲשֶׁר לֹא חָלְקוּ אֶת נַחֲלָתָם שְׁבָעָה שְׁבָטִים. וַיֹּאמֶר יְהוֹשֻׁעַ אֶל בְּנֵי יִשְׂרָאֵל "עַד אָנֹכָה אַתֶּם מִתְרַפֵּים לְבוֹא לְרִשְׁתָּה אֶת הָאָרֶץ אֲשֶׁר נָתַן לָכֶם ה' אֱלֹהֵי אֲבוֹתֵיכֶם?!". הָבוּ לָכֶם שְׁלֹשָׁה אָנָּשִׁים לְשִׁבְט וְאֲשַׁלְחֶם וַיִּקְמוּ וַיִּתְהַלְכוּ בְּאָרֶץ וַיִּכְתְּבוּ אוֹתָהּ לְפִי נַחֲלָתָם וַיָּבֹאוּ אֵלַי. וְהִתְחַלְקוּ אֹתָהּ לְשִׁבְעָה חֲלָקִים, יְהוּדָה יַעֲמֹד עַל גְּבוּלוֹ מִנֶּגֶב וּבֵית יוֹסֵף יַעֲמְדוּ עַל גְּבוּלָם מִצְפּוֹן. וְאַתֶּם תִּכְתְּבוּ אֶת הָאָרֶץ שְׁבָעָה חֲלָקִים וְהִבְאַתֶּם אֵלַי הִנֵּה וַיִּרְיֵיתִי לָכֶם גּוֹרֵל פַּה לַפְּגִי ה' אֱלֹהֵינוּ. כִּי אִין חֶלֶק לְלוּיִם בְּקִרְבְּכֶם כִּי כֹהֲנֵת ה' נַחֲלָתוֹ וְגַד וַיְרֹאבוּן וְחִצֵּי שְׁבָט הַמְּנַשֶּׁה לָקְחוּ נַחֲלָתָם מֵעֵבֶר לַיַּרְדֵּן מִזְרָחָה אֲשֶׁר נָתַן לָהֶם מֹשֶׁה עֶבֶד ה'." וַיִּקְמוּ הָאָנָּשִׁים וַיֵּלְכוּ וַיַּצּוּ יְהוֹשֻׁעַ אֶת הַהַלְכִים לְכַתֵּב אֶת הָאָרֶץ לְאֹמֶר לְכוּ וְהִתְהַלְכוּ בְּאָרֶץ וְכַתְּבוּ אוֹתָהּ וְשׁוּבוּ אֵלַי וּפֹה אֲשַׁלֵּיךְ לָכֶם גּוֹרֵל לַפְּגִי ה' בְּשֵׁלֶה. וַיֵּלְכוּ הָאָנָּשִׁים וַיַּעֲבְרוּ בְּאָרֶץ וַיִּכְתְּבוּהָ לְעָרִים לְשִׁבְעָה חֲלָקִים עַל סֵפֶר וַיָּבֹאוּ אֶל יְהוֹשֻׁעַ אֶל הַמַּחֲנֶה שֵׁלֶה. וַיִּשְׁלַךְ לָהֶם יְהוֹשֻׁעַ גּוֹרֵל בְּשֵׁלֶה לַפְּגִי ה' וַיַּחֲלֵק שָׁם יְהוֹשֻׁעַ אֶת הָאָרֶץ לַבְּנֵי יִשְׂרָאֵל כַּמְחֻלְקָתָם (יְהוֹשֻׁעַ יח, א-י).

אותם שבטים לא גילו יוזמה ולא הביעו העדפות אישיות, ולכן לגביהם חלה ברירת המחדל של חלוקה בגורל.

חלוקה עם העדפות אישיות נזכרת גם בגמרא:

ההוא דזבן ארעא אמצרא דבי נשיה (קנה קרקע אצל שדה אביו); כי קא פלגו (עם אחיו בנכסיו אביו), אמר להו: פליגו לי אמצראי! אמר רבה: כגון זה – כופין על מדת סדום (זה נהנה וזה לא חסר). מתקיף לה רב יוסף: אמרי ליה אחי: "מעלינן ליה עלויא כי נכסי דבי בר מריון!"... תרי ארעתא אתרי נגרי: אמר רבה: כגון זה כופין על מדת סדום. מתקיף לה רב יוסף: זמנין דהאי מדויל והאי לא מדויל! והלכתא כרב יוסף. תרתי אחד נגרא: אמר רב יוסף: כגון זה כופין על מדת סדום. מתקיף לה אביי: מצי אמר "בעינא דאפיש אריסי"?! והלכתא כרב יוסף: 'אפושי' – לאו מילתא היא (בבלי בבא בתרא יב ע"ב).

הסוגיה מתארת שני אחים שירשו נחלה, ולאחד מהם יש שדה פרטי הצמוד לאחד מצדדי הנחלה. אותו אח מייחס לחצי הצמוד לשדהו ערך גבוה הרבה יותר מאשר לחצי המרוחק משדהו, ואילו עבור האח השני שני החצאים שווים. האח הראשון מבקש לקבל את החצי הסמוך לשדהו בלי גורל – בדיוק כבקשתם של בני גד ובני ראובן. האם בקשתו מתקבלת? הראשונים האריכו בביאור פרטי המקרה המתואר בסוגיה, וגם האחרונים נחלקו בפסיקת ההלכה:

האחין או השותפין שבאו לחלוק השדה וליטול כל אחד חלקו: אם היתה כולה שוה לגמרי – חולקין לפי המדה בלבד, ואם אמר אחד תנו לי חלקי מצד זה כדי

שיהא סמוך לשדה אחר שלי ויהיה הכל שדה אחד – שומעין לו וכופה אותו על זה, שעייכוב בדבר זה מדת סדום היא. [הגה: ויש אומרים דאין שומעין לו, אלא צריך להעלות בדמים עד שיתרצו חביריו (טור בשם הרא"ש). ויש אומרים דהוי ספק, וכל דאלים גבר (מרדכי סוף פ"ק דב"ב בשם מהר"ם)].

אבל אם היה חלק ממנה טוב או קרוב לנהר יותר או קרוב לדרך, וישמו אותה היפה כנגד הרע, ואמר "תנו לי בשומא שלי מצד זה" – אין שומעין לו, אלא נוטל בגורל.

אמר להם "תנו חצי מדתה מהצד הרע בלא שומא, וטול אתה מהצד הטוב כדי שיהא חלקי סמוך לשדה שלי" – שומעין לו (שו"ע חו"מ קעד, א).

נראה שיש כאן שלושה מצבים. מצב א: הקרקע אחידה. במקרה זה, לפי השו"ע (המצטט את הרמב"ם) מקבלים את בקשתו של האח, שהרי "זה נהנה וזה לא חסר". אולם הרמ"א מביא את דעת הטור בשם הרא"ש, שלפיה דוחים את בקשתו של האח ומפילים גורל כרגיל, וכך מאפשרים לאח השני, אם יזכה בחצי הסמוך לשדה אחר, להתחלף עם אחיו תמורת תשלום. מצב ב: הקרקע אינה אחידה, והחלק הסמוך לשדה המבקש הוא השדה ה"טוב" יותר (פורה יותר, סמוך יותר לנהר או לדרך, וכדומה). במקרה זה, לכל הדעות אין מקבלים את בקשתו, אלא מפילים גורל כרגיל. מצב ג: הקרקע אינה אחידה, והחלק הסמוך לשדה המבקש הוא השדה ה"גרוע" יותר. במקרה זה, לכל הדעות מקבלים את בקשתו.

יש לתמוה, מדוע בכלל יש הבדל בין שלושת המצבים? הרי, כפי שהסברנו בסעיף הקודם, כאשר הקרקע אינה אחידה – מחלקים אותה ל"חבילות" בעלות אותו שווי כלכלי. אם חלק אחד "טוב" יותר הוא גם יהיה קטן יותר בהתאם, או יכלול תשלום כספי לאיזון השווי. אם כך, מדוע לא לקבל את בקשתו של האח במצב ב? ייתכן שיש כאן הכרה במגבלות השמאות: גם אם שמאי מומחה חילק את הנחלה לחלקים שנראים בעינינו שווים, ייתכן שהם לא לגמרי שווים – ייתכן שהחלק הקטן עדיין שווה יותר. עם זאת, במצב ג המבקש מוכן לקבל חלק שהוא גם גרוע יותר וגם קטן יותר, שהוא לכל הדעות שווה פחות עבור שאר האחים, ולכן שומעים לו.

ד. גוד או אגוד

שיטה כללית יותר לחלוקה המתחשבת בהעדפות אישיות היא שיטת "גוד או אגוד". השיטה נזכרת לראשונה בגמרא בקשר לחלוקת חפצים בידידים, כגון בתים או ספרים, או שדות קטנים שאם יחולקו יאבדו את ערכם:

אין בהן כדי לזה וכדי לזה – מהו? רב יהודה אמר: אית דינא דגוד או אגוד (זה שרוצה לחלוק ואמר לזה שאינו רוצה לחלוק "או קוץ לי דמים וקנה לך חלקי,

או אני אקוץ דמים ואתן לך בחלקך, שאי אפשר בשותפותך"). רב נחמן אמר: לית דינא דגוד או אגוד (שזה יכול לומר "לא שלך אקנה ולא שלי אמכור, אלא שותפין נהיה בה") (בבלי בבא בתרא יג ע"א).

בשיטת "גוד או אגוד", אחד האחים מציע מחיר עבור חלקו של השני, והשותף השני יכול לבחור אם למכור את חלקו במחיר שהוצע, או לקנות את חלקו של אחיו באותו מחיר. כך השותף השני יכול לבחור בהתאם להעדפותיו האישיות – אם שווי החלקה עבורו קטן יותר מהמחיר שהציע אחיו, הוא יעדיף למכור, ואם שווי החלקה עבורו גדול מהמחיר שהציע אחיו, הוא יעדיף לקנות. להלכה נפסק כדעת רב יהודה, שאכן יש דין "גוד או אגוד":

אחד מהשותפים שאמר לחבירו במקום שאין בו דין חלוקה, או בדבר שאי אפשר שיחלוקו כגון שפחה או כלי, "מכור לי חלקך בכך וכך או קנה ממני חלקי בשער הזה" – הדין עמו, וכופין את הנתבע למכור לחבירו או לקנות ממנו. [רמ"א: אפילו אמר ליתן בו הרבה יותר מדמיו, צריך השני לקנות או למכור (טור בשם הרא"ש ומרדכי ספ"ק דב"ב והמגיד פ"א דשכנים ריב"ש סי' תפ"ג וב"י בשם הרמב"ם ותשובת רמב"ן סי' מ"ג ורש"י ותוס')... ואין אדם יכול לומר לחבירו גוד או אגוד בפחות משויו, דאם לא כן ידחוק העשיר את העני למכור את שלו פחות משויו (ב"י בשם הרמ"ה):] (שו"ע חו"מ קע"א, ו).

לפי הרמ"א, המבקש לקנות או למכור אינו חייב להציע דווקא את מחיר השמאי. הוא יכול להציע מחיר גבוה יותר. מסתבר שיציע מחיר גבוה יותר, אם אכן החלק של אחיו שווה עבורו יותר מהערכת השמאי. כלומר, המחיר נקבע לפי העדפות אישיות. עם זאת, ההתחשבות בהעדפות אישיות היא מוגבלת: המבקש אינו רשאי להציע מחיר נמוך יותר מהערכת השמאי. מדוע? לכאורה יש כאן הזדמנות לאחיו לקנות קרקע בזול! אלא שיתכן שהאח הוא עני ואין לו כרגע כסף לקנות את חלקו של המבקש. במקרה זה הוא יאלץ למכור את החלק שלו במחיר הפסד. ייתכן שכלכלנים בימינו היו מציעים לאותו אח עני ללוות ולקנות, אולם ההלכה, באופן עקרוני, אינה מחייבת את האדם להיכנס לחובות, העלולים לפגוע בחירותו האישית והכלכלית.

בגמרא, דין "גוד או אגוד" נאמר רק בחפץ שאין לחלקו. אולם בהלכה הורחב הדין גם לקרקע שאפשר לחלקה:

האחים שבאו לחלוק, ושמו החלקים זה כנגד זה, ובאו להטיל גורלות, ואחד מהם חפץ באחד מן החלקים, ומעלה אותה ואומר "אני אתן בו יותר כך וכך על מה ששמאוהו או אתם תקחו אותו בכך וכך" – שומעין לו. ואם אינם רוצים באותו עילוי – יטלנו הוא בלא גורל. ויש חולקים" (שו"ע חו"מ קעד, ה, וכן טור).

מהו המקור לדין זה? לא מצאתי מקור בגמרא, אבל ייתכן שיש לו מקור בתורה.² כשאברם ולוט הגיעו לארץ כנען, הייתה מריבה בין רועי הצאן שלהם. אברם הציע ללוט לפתור את העימות על ידי חלוקת הארץ:

וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט "אֵל נָא תְהִי מְרִיבָה בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רְעִי וּבֵין רְעִיךָ, כִּי אֲנָשִׁים אָחִים אָנַחְנוּ. הֲלֹא כָל הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הִפְרָד נָא מֵעָלַי: אִם הִשְׂמָאל וְאִימָנָה וְאִם הַיְמִין וְאִשְׁמָאֵלָה" (בראשית יג, ח-ט).

אברם חילק את הארץ לשני חלקים: ימין ושמאל. הוא אפשר ללוט לבחור את החלק שהוא מעדיף, ולקח את החלק השני. כדי להבין את דברי אברם יש להבין את משמעות המושגים ימין ושמאל. למושגים אלה ישנן שתי משמעויות בלשון המקרא:

א. המשמעות הראשונית מתייחסת לגוף האדם – ימין היא היד החזקה ושמאל היא היד החלשה: "וַיִּקַּח יוֹסֵף אֶת שְׁנֵיהֶם, אֶת אֶפְרַיִם בְּיַמִּינוֹ מִשְׂמָאל וְיִשְׂרָאֵל וְאֶת מְנַשֶּׁה בְּשִׂמְלוֹ מִיְמִין וְיִשְׂרָאֵל, וַיִּגַּשׁ אֵלָיו" (בראשית מח, יג).

ב. במשמעות מושאלת, משתמשים בביטוי ימין או ימין גם ככינוי לדרום, שהרי כשאדם עומד ופניו למזרח, הדרום נמצא מהצד של ידו החזקה (הימנית); מאותה סיבה, הביטוי שמאל מציין את הצפון.

מה משמעות המילים ימין ושמאל בדברי אברם? לפי דעתי, מתוך המשך הסיפור נראה שאברם השתמש במילים אלה במשמעותן הראשונית – משמעות א. אברם ולוט באו מארץ מצרים ועמדו כשפניהם לצפון, ולכן ימין שלהם הוא מזרח ושמאל הוא מערב. אברם הציע ללוט לבחור בין מזרח למערב, ולוט בחר במזרח:³

וַיֵּשֶׁא לוֹט אֶת עֵינָיו וַיֵּרָא אֶת כָּל כְּפַר הַיַּרְדֵּן כִּי כֹלָה מִשְׁקָה לְפָנָי שַׁחַת ה' אֶת סֹדֶם וְאֶת עַמֹּרָה, כִּגְן ה' כְּאֶרֶץ מִצְרַיִם בְּאֶרֶץ צֹר. וַיִּבְחַר לוֹ לוֹט אֶת כָּל כְּפַר הַיַּרְדֵּן, וַיֵּסֶע לוֹט מִקְרָם וַיִּפְרְדוּ אִישׁ מֵעַל אָחִיו (שם י-יא).

לוט ראה את כיכר הירדן "כי כולה משקה" – אדמה פורייה ועשירה השותה מים לרוויה מהירדן (הכתוב מדגיש שהדבר היה לפני השחתת סדום ועמורה, כך שהקרקע עדיין לא הייתה רוויה במלח כמו היום). עבור לוט, החלק הזה היה בבירור החלק הטוב ביותר בארץ ישראל. לעומתו, אברם בוודאי העדיף את החלק המערבי – אזור הרי יהודה ושומרון – האזור שבו התגלה אליו ה' ובו בנה מזבחות לה'. הוא לא היה

2. עיון מורחב בחלוקת הארץ בין אברם ולוט ניתן למצוא במאמרו של הרב ד"ר יצחק דב פריז, "הגינות וצדק בחלוקת רכוש – היפרד נא מעליי". התפרסם בעלון מכללת שערי משפט מס' 143, פרשת לך לך ה'תשס"ד, <http://www.daat.ac.il/mishpat-ivri/skirot/143-2.htm>.
3. ר' פריז (בהערה למעלה) פירש את המושגים "ימין" ו"שמאל" במשמעותם המושאלת – "דרום" ו"צפון", ולכן פירש שלוט לא קיבל את הצעתו של אברם אלא הציע חלוקה אחרת. לענ"ד מסתבר יותר לפרש את המושגים במשמעותם הראשונית.

רוצה לקבל את החלק המזרחי הכולל את ערי הכיכר המושחתות. ההעדפות של לוט נקבעו לפי איכות חומרית, ושל אברם לפי איכות רוחנית; כל אחד קיבל את החלק הטוב בעיניו.

דוגמה נוספת לחלוקה מסוג זה נמצאת במדרש:

בשעת אסיפתו של יצחק, הניח את מקנהו ואת כל קניינו ואת כל אשר לו לשני בניו... אמר עשו ליעקב: "נחלוק כל מה שהניח לנו אבא לשנים, ואני בורר שאני בכור"... אמר יעקב "הרשע הזה לא מלא עינו מן העושר..." מה עשה יעקב אבינו? חלק לשני חלקים: כל מה שהניח אביו [הרכוש] – חלק אחד, ואת ארץ ישראל – חלק אחר. מה עשה עשו? הלך אצל בנו של ישמעאל. אמר לו... "האמורי והכנעני אז בארץ, ויעקב בוטח לרשת את הארץ ולכן טול אתה מה שהניח אביך ואין ליעקב מאומה". ולקח עשו כל מה שהניח אביו, וארץ ישראל ומערת המכפלה לקח יעקב, וכתבו כתב עולם ביניהם (ר' לוי, פרקי דרבי אליעזר פרק לח).

כמו אברם, גם יעקב חילק את הירושה לשני חלקים ונתן לאחיו לבחור את החלק שהוא מעדיף. כמו לוט, גם עשו בחר את החלק העדיף מבחינה חומרית, והשאיר לאחיו את החלק העדיף מבחינה רוחנית.

תהליכי החלוקה המתוארים כאן דומים למתואר בשו"ע שציטטנו למעלה (חו"מ קעד, ה) בכך שבכל המצבים, אחד משני השותפים מציע שתי אפשרויות, ומאפשר לשותף השני לבחור אפשרות אחת ולתת לו את השנייה. לשותף השני ישנה אפשרות לבחור בהתאם להעדפות האישיות שלו. בפרשת אברם ולוט, שתי האפשרויות הללו הן שני חלקים של ארץ ישראל; במדרש על יעקב ועשו, שתי האפשרויות הללו הן ארץ ישראל לעומת כל שאר הרכוש של יצחק; בשו"ע, שתי האפשרויות הללו הן: לשלם כסף ולקבל חלק מסוים מהנחלה בלי הגרלה, או לקבל כסף ולוותר על השתתפות בהגרלה על אותו חלק.

עם זאת, יש גם הבדלים בין המצבים: בפרשת אברם ולוט לא היו תשלומי איזון כספיים, וכמו כן לא התבצעה כלל חלוקה על פי שומה – אברם הוא שחילק את הרכוש לשני חלקים. האם חלוקה בסגנון זה מתאימה להלכה? נציג את השאלה לגבי כל אחד מההבדלים בנפרד:

א. האם אחד השותפים יכול לשנות את חלוקת השמאי בלי להוסיף תשלומי איזון כספיים, ולהגיד לשותף השני "בחר אתה חלק אחד ותן לי את החלק השני"? לדעתי התשובה היא כן. אומנם כתוב בשו"ע "ומעלה אותה ואומר 'אני אתן בו יותר כך וכך על מה ששמאוהו'", אולם אין הכוונה ל"העלאה" בכסף דווקא. המבקש יכול גם "להעלות" את החלק שהוא רוצה בכך שיקטין אותו. לדוגמה, נניח שהשמאי קבע שהחלק המזרחי צריך להיות ברוחב ארבעה מטר והחלק המערבי ברוחב חמישה מטר.

אחד האחים רוצה מאוד את החלק המזרחי, ולכן "מעלה" אותו ואומר לאחיו: "אני מוכן לקבל חלק בצד המזרחי ברוחב שלושה מטר. ואם זה לא נראה לך – קח אתה שלושה מטר בצד המזרחי ותן לי את השאר". לכאורה הצעה זו אף טובה יותר מהצעת "גוד או אגוד" הכרוכה בתשלומים כספיים, שכן אין בה הבדל בין עשיר לעני, ואין חשש שהאח השני יאלץ לקחת הלוואה.

ב. האם אחד האחים יכול להציע חלוקה של הקרקע בלי לבצע שומה כלל? כאן המצב מורכב יותר. מצד אחד, שיטת אברם-לוט מאפשרת לחסוך את ההוצאות על שמאי ולכאורה זהו יתרון משמעותי. מצד שני, ייתכן שהצורך בשמאי הוא מהותי, שכן הערך של קרקע תלוי לא רק בהעדפות אישיות, ישנם גם גורמים אובייקטיביים העשויים להשפיע עליו. לדוגמה, ייתכן שאחד האחים מעדיף בית עם נוף ליס. זו העדפה אישית שבשבילה הוא לא צריך שמאי. אבל, ייתכן שלפי תוכנית המתאר העירונית, בעוד שנה עומדים לבנות מגדל משרדים בדיוק מול החלון של אותו זוהי עובדה אובייקטיבית שעשויה להשפיע באופן משמעותי על ההעדפה של אותו אח. כדי לברר את כל העובדות החשובות מסוג זה, יש צורך בשמאי הבקי בתוכניות מתאר ובכל שאר הגורמים העשויים להשפיע על שווי של נכס. אם כך, ייתכן שהאח השני (שצריך לבחור) יכול לטעון, שבלי שמאי, הוא אינו יודע איזה חלק כדאי לו לבחור, ולפיכך יש לו זכות לדרוש להזמין שמאי ולשלם לו מהרכוש המשותף. וצריך עיון להלכה, האם אכן ישמעו לאח ה"מעלה" חלק אחד באופן זה, ללא תשלומי איזון ו/או ללא שמאי?

חלק שני: חלוקה הוגנת במתמטיקה ובכלכלה

א. בעיית חלוקת העוגה

המחקר המדעי המודרני בנושא חלוקה הוגנת התחיל במאמר של המתמטיקאי היהודי פולני הוגו שטיינהאוס (Steinhaus, 1887-1972). במהלך מלחמת העולם השנייה, כשהתחבא מפני הנאצים, אחת השאלות שהטרידה את מוחו הייתה: איך לחלק קרקע (ודברים נוספים) באופן הוגן?⁴

בתחילת דבריו הוא תיאר את תהליך "חתוך ובחור" (cut-and-choose) – התהליך המשמש עד היום לחלוקת עוגת יום הולדת בין שני ילדים. זוהי דוגמה קלאסית לבעיית חלוקה הוגנת. העוגה היא משאב לא אחיד – יש בה חלקים מצופים בשוקולד, קצפת, וכדומה. לכל ילד יש טעם אישי העשוי להיות שונה מזה של ילדים אחרים – אחד מעדיף שוקולד, השני קצפת, וכדומה. כאשר ההורים חותכים את העוגה לחלקים שווים

4. Hugo Steinhaus, "The Problem of Fair Division", *Econometrica* 16 (1948), pp. 101-104

בעיניהם, הילדים לא תמיד מרוצים כי החלקים אינם בהכרח שווים בעיניהם. הפתרון הוא לתת לילדים עצמם לחלק. ילד אחד חותך את העוגה לשני חלקים, הילד השני בוחר את אחד החלקים, והראשון מקבל את החלק שנשאר. הפתרון הזה מבטיח שכל ילד יוכל לקבל לפחות חצי מהעוגה, לפי הטעם האישי שלו. מדוע?

- הילד הראשון יכול לחתוך את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו. כך הוא מבטיח שיקבל בדיוק חצי מהעוגה, לא משנה מה יבחר אחיו. לדוגמה, אם לילד הראשון אכפת רק משוקולד, הוא יכול לחתוך את העוגה לשני חלקים עם אותה כמות שוקולד, כך יבטיח שבכל מקרה יקבל לפחות חצי מכמות השוקולד הכוללת.
- הילד השני יכול לבחור את החלק הטוב יותר בעיניו, כך שהוא ודאי יקבל לפחות חצי מהעוגה. לדוגמה, נניח שלילד השני אכפת רק מהקצפת. אם הילד הראשון חילק את העוגה לשני חלקים עם כמות שונה של קצפת, השני לא צריך לכעוס או לריב איתו – הוא פשוט בוחר את החלק שיש בו יותר קצפת, ושמח שקיבל יותר מחצי מכמות הקצפת הכוללת.

תהליך "חתוך ובחר" הזה מזכיר מאוד את חלוקת הארץ על ידי אברם ולוט, את חלוקת רכוש יצחק על ידי יעקב ועשו, ואת העיקרון ההלכתי "גוד או אגוד" בקרקע. למעשה, כל תורת החלוקה ההוגנת המודרנית, מטרתה להרחיב תהליך זה למצבים ולמקרים שונים.

מטרתו הראשונה של שטיינהאוס הייתה להכליל את תהליך "חתוך ובחר" משני אנשים לשלושה אנשים ויותר. הוא הציג את השאלה לתלמידיו, המתמטיקאים הפולנים הידועים סטפן באנאך (Banach, 1892-1945) וברוניסלאו קנאסטר (Knaster, 1893-1980). הם אכן מצאו תשובה שאותה פרסם במאמרו הנ"ל. לצורך הדוגמה, נניח שיש לחלק קרקע בין n יורשים. הקרקע – כמו העוגה – היא משאב לא אחיד, ולכל אחד מהיורשים ישנן העדפות אישיות שונות. המטרה היא לתת לכל יורש חלק השווה בעיניו לפחות 1 חלקי n מהשווי הכולל. האלגוריתם שהציעו באנאך וקנאסטר הוא כזה:

- יורש אחד מסמן על גבי המפה שטח השווה 1 חלקי n מהשווי הכולל של הקרקע, לפי ההעדפות האישיות שלו (לדוגמה, אם הוא חקלאי, הוא יסמן שטח הכולל 1 חלקי n מהשטחים הראויים לעיבוד). השטח שסומן מוגדר כ"השטח הנוכחי", והיורש שסימן אותו מוגדר כ"היורש הנוכחי".
- שואלים את היורש השני: האם השטח הנוכחי אכן שווה לכל היותר 1 חלקי n ? אם הוא מסכים עוברים הלאה. אם הוא מתנגד וטוען "החלק הזה שווה יותר מ-1 חלקי n ", מבקשים ממנו "לקצץ" את החלק הזה ולסמן בתוכו חלק השווה בדיוק 1 חלקי n ; במקרה זה השטח החדש שסומן מוגדר כ"השטח הנוכחי" והיורש השני מוגדר כ"היורש הנוכחי".

- ממשיכים באותו אופן עם היורש השלישי, הרביעי וכו'. בכל פעם ישנו "שטח נוכחי" ששווה בדיוק 1 חלקי n עבור היורש הנוכחי, ושווה לכל היותר 1 חלקי n עבור היורשים הקודמים. לאחר שעוברים על כל n היורשים, נותנים את השטח הנוכחי ליורש הנוכחי. היורש הנוכחי קיבל שטח בשווי הוגן לפי ההעדפות האישיות שלו, כך שהוא יכול ללכת הביתה.
- אם נשאר רק יורש אחד נותנים לו את השטח שנשאר ומסיימים. אם לא, מבצעים את אותו אלגוריתם באופן רקורסיבי על $n-1$ היורשים שנותרו. כפי שבנינו את האלגוריתם, כל אחד מהיורשים הנותרים חושב שהשטח שנמסר שווה לכל היותר 1 חלקי n, ולכן השטח שנותר שווה לפחות $n-1$ חלקי n. כל אחד מהם יקבל 1 חלקי $n-1$ מתוך שטח זה. על ידי הכפלה מקבלים שכל אחד מהם יקבל לפחות 1 חלקי n מהשטח הכולל, כפי שנדרש.

ב. חלוקת חפצים בדידים

- האלגוריתם של באנאך וקנסטר מכליל את תהליך אברם-לוט לחלוקת קרקע ללא כסף, משני שחקנים לכל מספר של שחקנים. מה אם החפץ שיש לחלק הוא חפץ בדיד, שאין בו "דין חלוקה", כגון בית או ספר? כשיש שני שחקנים, הפתרון ההלכתי הוא "גוד או אגוד", אבל מה קורה כשיש הרבה שחקנים? ומה קורה כשיש כמה חפצים בדידים? שטיינהאוס התייחס גם לשאלה זו באותו מאמר. הוא תיאר את התהליך הבא:
- כל אחד מהשותפים מציע ערך כספי לכל אחד מהחפצים הבדידים העומדים לחלוקה.
 - כל חפץ נמכר לשותף שהציע את הערך הגבוה ביותר עבורו; הכסף נאסף בקופה משותפת.
 - לכל שותף, מחשבים את הערך הכולל של כל החפצים עבורו (סכום הערכים שהציע), מחלקים במספר השותפים n. ומשלמים לו מהקופה.
 - שאר הכסף, הנשאר בקופה המשותפת, מחולק שווה בשווה בין כולם.
- לדוגמה, נניח שיש לחלק בית, גינה וחצר בין שני שותפים, המייחסים להם את הערכים הבאים:
- שותף א: בית=60, גינה=30, חצר=10.
 - שותף ב: בית=40, גינה=20, חצר=20.
- שותף א זוכה בבית ובגינה ומשלם 90, ושותף ב זוכה בחצר ומשלם 20. סכום הערכים של שותף א הוא 100, לכן משלמים לו 50; סכום הערכים של שותף ב הוא 80, לכן משלמים לו 40. נשארו 20 בקופה, ולכן משלמים עוד 10 לכל שחקן. בסך-הכול, שותף א מקבל בית וגינה ומשלם 30, ושותף ב מקבל חצר ועוד 30.

ניתן להוכיח, שסכום הערכים והכסף שמקבל כל שחקן שווה לפחות לחלק היחסי שמגיע לו לקבל מהירושה.

בעקבות מאמרו של שטיינהאוס, פורסמו מאות מאמרים העוסקים בחלוקה הוגנת מהיבטים שונים ובמצבים שונים.⁵ כולם מניחים, כמו במקרה של אברם ולוט, שהחלוקה צריכה להתחשב בהעדפות האישיות של המשתתפים.

חלק שלישי: בין הלכה למדע

הלימוד המשותף של דיני חלוקה בהלכה ובמדע יכול להביא תועלת לשני הצדדים. המדע תורם להלכה בכך שהוא מאפשר להרחיב עקרונות המופיעים בהלכה, ממקרים פרטיים למקרה הכללי. לדוגמה, בהלכה מתואר תהליך "גוד או אגוד" לשני אנשים וחפץ אחד, והמחקר המדעי מצא דרכים להכליל את העיקרון וליישם אותו על כל מספר של אנשים וחפצים, כפי שראינו בחלק הקודם. בהמשך החלק הנוכחי נתאר דוגמאות נוספות.

א. דין בן המצר

לפי ההלכה, אדם המוכר שדה צריך לתת עדיפות לקונה שיש לו שדה סמוך (קונה זה נקרא "בן המצר" או "מצרן"). מה קורה אם יש כמה קונים שלכולם יש שדות סמוכים? היה לשדה הנמכר ארבעה מצרנים מארבע רוחותיו – יד כולם שווה בה, ויחלקוהוה באלכסון, כדי שיגיע לכל אחד חלק על פני כל שדהו (שו"ע חו"מ קעה, יא).

ההלכה מתארת מקרה שבו השדה הנמכר הוא ריבועי, ומכל אחד מארבעת צדדיו ישנו שדה השייך למצרן אחר. מכיוון שלכל המצרנים יש זכויות שוות, הפתרון הוא לחלק את השדה על ידי העברת שני אלכסונים המחלקים את השדה לארבעה משולשים ישיריזווית, כך שהיתר של כל משולש חופף לאחת מארבע הצלעות של השדה (ראו תרשים בספרי שו"ע המודפסים). חלוקה זו נותנת לכל אחד מהמצרנים חלקה שווה הצמודה לשדה הנוכחי שלו.

המקרה המתואר למעלה מעורר שאלות רבות: מה הדין אם השדה הנמכר אינו ריבועי? מה אם שדותיהם של המצרנים אינם מסודרים בדיוק במקביל לצלעות השדה אלא סמוכים אליו בצורה אחרת כלשהי (למשל שדה אחד נוגע בפינה ובחלק מהצלע המזרחית, שדה שני באמצע הצלע המזרחית, שדה שלישי בצלע המזרחית וחלק

5. סקירה של עשרות (מתוך מאות) מאמרים מחקרניים בנושא זה ניתן למצוא בוויקיפדיה האנגלית בדף Fair division.

מהדרומית, וכו')? מה אם השדה אינו אחיד, כך שחלוקה לחלקים שווים שטח לא תהיה הוגנת?

שאלות דומות נשאלו לפני כ-35 שנה על ידי המתמטיקאי תיאודור היל.⁶ ישנן n מדינות הצריכות לחלוק שטח הנמצא ביניהן, כגון אגם או יער. לכל אחת מהמדינות יש גבול משותף עם השטח העומד לחלוקה. נוסף על כך, לכל אחת מהמדינות יש העדפות שונות – כמו בבעיית חלוקת העוגה. המטרה היא לתת לכל מדינה שטח המקיים בר זמנית את שתי הדרישות הבאות: (א) הוגנות – החלק שניתן לכל מדינה שווה לפחות 1 חלקי n מהשווי הכולל, לפי ההעדפות של אותה מדינה; (ב) קשירות – איחוד החלק שניתן לכל מדינה יחד עם השטח הנוכחי שלה נותן קבוצה קשירה במישור. היל הוכיח, תחת הנחות טופולוגיות מסוימות, שחלוקה כזאת תמיד קיימת. שנים אחדות לאחר מכן הציגו אנטולי בק וויליאם ווב שני אלגוריתמים למציאת חלוקה כזאת.⁷ אלגוריתמים מסוג זה יוכלו לסייע לפתרון בעיות של חלוקת שותפות או מצרנות במקרים מורכבים.

ב. חלוקה עם זכויות לא שוות

עד עתה הנחנו שלכל המשתתפים בתהליך החלוקה יש זכויות שוות. אולם לפעמים למשתתפים שונים יש זכויות שונות. שתי דוגמאות לכך הן הבכור והיבם. לפי התורה, האח הבכור לאביו זכאי לקבל שני חלקים בירושת אביו: "כִּי אֶת הַבְּכֹר בֶּן הַשְּׁנוֹאָה יִפְרֹ לָתֵת לוֹ פִּי שְׁנַיִם כָּל אֲשֶׁר יִמָּצֵא לוֹ, כִּי הוּא רִאשִׁית אָנֹכִי לוֹ מִשְׁפַּט הַבְּכֹרָה" (דברים כא, יז). בדומה לכך, לאחר שאח אחד נפטר ללא בנים ואח אחר ייבם את אשתו, היבם זכאי לקבל את חלקו של האח הנפטר בירושה, נוסף על החלק שלו.

במחשבה ראשונה נראה שהדבר אינו דורש שינוי מהותי בתהליך החלוקה: כל מה שצריך לעשות הוא לחלק את הירושה ל- $n+1$ חלקים (כאילו היו לפנינו $n+1$ יורשים), ולתת לבכור או ליבם שני חלקים מתוכם. לדוגמה, אם יש ארבעה אחים ואחד מהם בכור, נחלק את הירושה לחמישה חלקים, ניתן שני חלקים לבכור וחלק אחד לכל אח אחר. הבעיה בתהליך זה היא שהבכור עלול לקבל נחלה לא-קשירה – שני שדות שאין קשר ביניהם. הערך של שדות כאלו נמוך משמעותית מהערך של שדה אחד גדול. ההלכה כאן מבחינה בין בכור ליבם:

6. Theodore P. Hill, "Determining a Fair Border", *The American Mathematical Monthly* 90.7 (1983), p. 438

7. Anatoly Beck, "Constructing a Fair Border", *The American Mathematical Monthly* 94.2 (1987), p. 157

William A. Webb, "A Combinatorial Algorithm to Establish a Fair Border", *European Journal of Combinatorics* 11.3 (1990), p. 301

הבכור שחלק – נוטל שני חלקים שלו כאחד. אבל היבם שחלק עם אחיו בנכסי האב – נוטל חלקו וחלקו אחיו בגורל, אם עלו במקום אחד עלו ואם עלו בשני מקומות עלו (רמב"ם שכנים יב, ב; שו"ע חו"מ קעד, ב).

הגה: ויש אומרים, דדוקא שהיו החלקים שווים. אבל אם היה אחד טוב מחבירו, אפילו בכור אינו נוטל חלקו ביחד. וכן אם היה לפשוט שדה במצר אלו השדות (טור והרא"ש והמגיד פי"ב דשכנים בשם שאר מפרשים) (רמ"א על שו"ע חו"מ קעד, ב).

הערתו של הרמ"א מובנת בהחלט. לשם המחשה, נניח שיש שני אחים ואחד מהם בכור. הקרקע שיש לחלק היא ריבועית, ובדיוק במרכזה ישנו מעיין יקר-ערך. אם הקרקע מחולקת לנחלות מלבניות, ולבכור ישנה זכות לקבל את שני חלקיו כאחד (במלבן אחד קשיר), הבכור בוודאות יזכה במעיין – לא משנה איך נחלק ואיזו הגרלה תבצע. האח הצעיר יטען בצדק שהחלוקה אינה הוגנת – הוא זכאי לקבל $1/3$ מהירושה, ולכן זכאי לקבל את המעיין בהסתברות של $1/3$ לפחות. אפשר להציע תשלומי-איוון כספיים, אולם כפי שהסברנו בחלק הראשון, ההלכה מודעת לכך שתשלומים כספיים אף-פעם אינם יוצרים איוון מדויק, ולפיכך חלוקה הנותנת חלק מסוים בוודאות לאחד האחים לא תיחשב הוגנת.

המקרה המתואר למעלה מעורר שאלות רבות הקשורות לחלוקה עם זכויות לא שוות: מתי אפשר למצוא חלוקה הוגנת שבה כל החלקות קשירות? אם אי אפשר למצוא חלוקה קשירה – האם אפשר למצוא חלוקה שהיא "כמעט" קשירה (כלומר, עם מספר קטן ככל האפשר של פיצולי נחלה)? איך אפשר לחלק קרקע בין שותפים, שחלוקת הזכויות ביניהם אינה פשוטה כמו בירושה (2: 1, 1: 2, וכו') אלא מורכבת יותר (נניח, 41.97% לשותף אחד, 23.45% לשותף שני וכו')?

שאלות כאלו נדונו במחקר משתי נקודות מבט. מנקודת מבט חישובית, פתחו כמה אלגוריתמים מתוחכמים המחלקים עוגה בהוגנות לשותפים עם זכויות שונות. אלגוריתמים אלה יעילים יותר, מבחינה חישובית, מהשיטה של "שכפול" משותפים בעלי זכויות רבות יותר, שתוארה למעלה.⁸ מנקודת מבט גיאומטרית, נבדקה השאלה מה המספר הקטן ביותר של חיתוכים שיש לבצע בעוגה כדי להשיג חלוקה הוגנת עם זכויות שונות: השאלה נחקרה עבור חלוקה חד-ממדית – כל החתכים נעשים במקביל. במצב זה ניתן להוכיח, שתמיד אפשר להשיג חלוקה הוגנת עם $3n-4$ חיתוכים לכל

8. Kevin McAvaney, Jack Robertson and William Webb, "Ramsey Partitions of Integers and Fair Divisions", *Combinatorica*, 12.2 (1992), p. 193
 Ágnes Cseh and Tamás Fleiner, "The Complexity of Cake Cutting with Unequal Shares", *ACM Transactions on Algorithms* (TALG) 16.3 (2020), pp. 1-21

היותר.⁹ במקרים מסוימים דרושים לפחות $2n-2$ חיתוכים.¹⁰ בפרט, אפילו כשיש שני שותפים עם זכויות שונות (כגון שני אחים שאחד מהם בכור), מספר החיתוכים המינימלי הדרוש הוא 2. המשמעות היא, שאם החלוקה נעשית באופן דרממדי (על ידי חתכים מקבילים), לא ניתן להבטיח שהחלוקה תהיה גם הוגנת וגם קשירה; ייתכן שאחד האחים יאלץ לקבל נחלה לא קשירה. מצד שני, אם החלוקה נעשית באופן דרממדי (על ידי חתכים לא מקבילים), ניתן להשיג חלוקה קשירה לשני שותפים עם זכויות שונות כלשהן. אם כך, במקרה של שני אחים שאחד מהם בכור, אפשר לפתור את הבעיה שתוארה בהלכה שבשו"ע באופן שיספק את כל הדרישות – שני האחים יקבלו נחלות קשירות, וכל אחד מהאחים יקבל נחלה ששווייה תואם את הזכויות שלו, לפי ההעדפות האישיות שלו. השאלה איך לפתור את הבעיה כשיש שלושה שותפים או יותר עדיין פתוחה.¹¹

ג. חשיבות ההגרות בתהליכי חלוקה

המחקר המדעי מסייע להבין פרטים בדין התורה. ראינו שבדין התורה, ברירת המחדל היא חלוקה בגורל. מחקרים מהשנים האחרונות עוזרים לנו להבין מדוע יש צורך להשתמש בגורל. מה החשיבות של שימוש בהגרות בתהליכים של חלוקה הוגנת? 1. הקטנת מספר השאילתות לשחקנים. תהליכי חלוקה הוגנת דורשים מהמחלק להציג שאילתות לשחקנים. השאילתות הן מהסוג של "איפה יש לחלק את הקרקע כך ששני החלקים יהיו שווים בעיניך?" או: "כמה שווה בעיניך החלק המזרחי?" וכו'. כאשר לא משתמשים בהגרה, מספר השאילתות שיש להציג לכל שחקן הוא מסדר גודל של $\log n$ (לוגריתם של מספר השחקנים הכולל).¹² בעזרת שימוש מתוחכם בהגרות, אפשר להציג לכל שחקן רק מספר קבוע של שאילתות (שאינו תלוי במספר השחקנים הכולל).¹³

9. Logan Crew, Bhargav Narayanan and Sophie Spirkl, "Disproportionate Division", *Bulletin of the London Mathematical Society* 52.5 (2020), pp. 885-890
10. Erel Segal-Halevi, "Cake-Cutting with Different Entitlements: How Many Cuts are Needed?", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 480.1(2019), 123382
11. Harunor Shishido and Dao-Zhi Zeng, "Mark-Choose-Cut Algorithms for Fair and Strongly Fair Division", *Group Decision and Negotiation*, 8.2 (1999), pp. 125-137
12. Shimon Even and Azaria Paz, "A Note on Cake Cutting", *Discrete Applied Mathematics* 7.3 (1984), pp. 285-296
13. Jeff Edmonds and Kirk Pruhs, "Balanced Allocations of Cake", *Proceedings of FOCS* 2006, pp. 623-634

2. מניעת מניפולציות אסטרטגיות. תהליכים רגילים לחלוקת עוגה ניתנים למניפולציה. כלומר, אדם היודע את ההעדפות של האנשים האחרים, יכול להשתמש במידע זה כדי לפעול באופן שיגדיל את החלק שלו. הדבר נכון אפילו בתהליך "חתוך ובחר": אם החותך יודע את ההעדפות של הבוחר, הוא יכול לחתוך את העוגה, לא לשני חלקים שווים בעיניו, אלא לשני חלקים כמעט שווים בעיני הבוחר. החותך ייתן יתרון קטן לאותו חלק ששווה בעיניו פחות. כך, הבוחר יבחר את אותו חלק, וישאיר לחותך את החלק הטוב ביותר עבורו (כך בדיוק עשה יעקב אבינו לפי המדרש שהבאנו בסוף החלק הראשון).

האפשרות לבצע מניפולציה עלולה לעודד אנשים לרגל אחר חבריהם כדי להשיג מידע על ההעדפות שלהם. כדי למנוע מצב זה, מנסים החוקרים לפתח תהליכים חסיני אסטרטגיה – strategyproof. בתהליך חסין אסטרטגיה, אדם מקבל את החלק הטוב ביותר עבורו כשהוא פועל לפי ההעדפות האמיתיות שלו, בלי כל קשר להעדפות של האחרים. לכן אין טעם לרגל אחרי אנשים אחרים ולנסות לברר מה ההעדפות שלהם. באחד הווריאנטים של בעיות חלוקה (בעיה של חלוקת חדרים ודמי שכירות בין שותפים לדירה), הוכח שלא קיים תהליך חלוקה דטרמיניסטי שהוא חסין אסטרטגיה; כדי להשיג חסינות מפני אסטרטגיה חייבים להשתמש בגורל. ואכן ישנו תהליך אקראי חסין אסטרטגיה המשיג חלוקה שהיא "כמעט" ללא קנאה.¹⁴ גם בבעיית חלוקת העוגה, קל יותר להשיג חסינות מפני אסטרטגיה כאשר משתמשים בגורל.¹⁵ ייתכן, אם כך, שהתורה קבעה לחלק את הארץ בגורל, כדי שלבני ישראל לא יהיה תמריץ לרגל אחר זולתם.

ד. שיקולים הלכתיים שהמדע עדיין לא התייחס אליהם

ההלכה מפנה את תשומת ליבנו לשיקולים חשובים, שהמדע לעת עתה מתעלם מהם לשם הפשטות. הנה כמה דוגמאות.

א. במחקר המדעי על חלוקה הוגנת, מקובל להניח שכל אדם יודע מה הן ההעדפות האישיות שלו, ויכול לבחור את החלק הטוב ביותר עבורו. אבל במציאות אנשים לא תמיד יודעים מה הם מעדיפים, שכן ההעדפה תלויה גם בעובדות אובייקטיביות שאינן ידועות להם (כמוסבר בסוף החלק הראשון למעלה).¹⁶ מסקנה אפשרית היא שיש לשלב

14. Lachlan Dufton and Kate Larson, "Randomised Room Assignment-Rent Division", *Workshop on Social Choice and Artificial Intelligence (WSCAI) 2011*, pp. 34-39

15. Yiling Chen, John K. Lai, David C. Parkes and Ariel D. Procaccia, "Truth, Justice, and Cake Cutting", *Games and Economic Behavior* 77.1 (2013), pp. 284-297

16. במחקר המדעי על מכרזים, חקרו לפעמים מצב שבו ערך החפץ אינו ידוע למשתתפים, והם צריכים לשלם כדי לברר את הערך המדויק. ראו למשל: A: Donald B. Hausch and Lode Li,

תהליכי חלוקה הוגנת מהמחקר המדעי, כמו התהליכים של שטיינהאוס וממשיכיו שתוארו למעלה, עם הערכת שמאי אובייקטיבית, שתעזור למשתתפים לבחור את הטוב ביותר עבורם.

ב. במחקר המדעי על חלוקה הוגנת, מקובל להניח שכל השותפים נמצאים יחד באותו מקום, ויכולים להשתתף בתהליך החלוקה באותו זמן. ההלכה מתייחסת למצב המעשי שבו רק חלק מהשותפים מגיעים לחלוקה, ועדיין יש לתת להם את חלקם: לא היו כאן כל האחים, ואותו שלפנינו מבקש לחלוק – חולק בפני שלשה, אפילו הם הדיוטות, ובלבד שיהיו נאמנים ובקיאים בשומא... (שו"ע חו"מ קעה, א).

המחקר המדעי התחיל לחקור מצב זה רק בשנים האחרונות. כיום ידועים פתרונות למצב שבו רק אחד מהשותפים אינו נמצא.¹⁷ עדיין לא ידועים פתרונות למצב שבו שני שותפים או יותר לא נמצאים.

ג. התהליך של שטיינהאוס לחלוקת חפצים בידיים (ההרחבה של "גוד או אגוד") מניח שכל אחד מהשותפים יכול לשלם כל מחיר שיידרש. ההלכה מתייחסת גם למצב שאחד השותפים הוא עני, ולא בהכרח יוכל לשלם את המחיר שתובע השותף השני. לכן ההלכה מגבילה את דין "גוד או אגוד" למחיר הוגן על פי הערכת שמאי. עד כמה שידוע לי, המחקר המדעי בחלוקה הוגנת עדיין לא מצא פתרון כללי לבעיה זו.¹⁸

סיכום ומחקר עתידי

המאמר מעלה כמה שאלות למחקר עתידי.

מבחינה הלכתית, יש לדון אם ועד כמה ראוי להשתמש בתהליכי חלוקה הוגנת שתוארו במחקר המדעי, כגון תהליך החלוקה של שטיינהאוס וממשיכי דרכו. מובן

Common Value Auction Model with Endogenous Entry and Information Acquisition", *Economic Theory* 3.2 (1993), pp. 315-334. Nicola Persico, "Information Acquisition in Auctions", *Econometrica* 68.1 (2000), pp. 135-148. במחקר המדעי על חלוקה הוגנת, למיטב ידיעתי, עדיין לא חקרו מצב זה.

17. הנה שני מאמרים בנושא: Megumi Asada, Florian Frick, Vivek Pisharody, Maxwell Polevy, David Stoner, Ling Hei Tsang and Zoe Wellner, "Fair Division and Generalizations of Sperner and KKM-type results", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 32.1 (2018), pp. 591-610. Guillaume Cheze, "How to Share a Cake with a Secret Agent", *Mathematical Social Sciences* 100 (2019), pp. 13-15.

18. לאחרונה התפרסם מאמר המתייחס לשותפים עם תקציב מוגבל בהקשר של בעיית חלוקת שכר הדירה: Ariel D. Procaccia, Rodrigo A. Velez and Dingli Yu, "Fair Rent Division on a Budget", *Proceedings of AAAI* (2018), pp. 1177-1184.

שאם כל השותפים מסכימים לתהליך מסוים, מותר להם להשתמש בו, אולם מה הדין אם אחד השותפים תובע להשתמש בתהליך מסוים והשותף השני מתנגד – האם שומעים לו כמו בדין "גוד או אגוד"? ואם כן, איך מחליטים באיזה תהליך בדיוק להשתמש? במאמר העליתי שיקולים לכאן ולכאן, אולם הפסיקה בנושא צריכה להתקבל על ידי דיינים מומחים.

מבחינה מדעית, ישנם שיקולים הלכתיים רבים שהמדע עדיין לא התייחס אליהם כראוי, כמו הדוגמאות שהבאנו למעלה – חלוקת קרקע דרממדיית לשותפים עם זכויות שונות, חלוקת קרקע כשרק אחד השותפים נמצא, או חלוקת חפצים כשחלק מהשותפים עניים. שיקולים אלה מהווים אתגר מעניין ומעשי למתמטיקאים ומדעני מחשב המתעניינים במחקר על חלוקה הוגנת.